

Costruire sistemi con il pigeonhole principle

Giacomo Ghilotti¹ - Giuseppe Isernia²

Sunto: In questo lavoro viene mostrato come usare il principio del cassetto per costruire sistemi per superenalotto, lotto e giochi simili, al solo scopo di rendere più interessante il principio di Dirichlet, non certo per invogliare il lettore ai giochi a pronostico.

Abstract: In this paper we show how to use the pigeonhole principle to build systems for superenalotto, lotto and similar games. Our aim is only to make more interesting the Dirichlet principle, not to induce the reading public to play such games.

Parole chiave: sistemi, pigeonhole, gioco, combinazioni semplici.

¹ Analista/programmatore, Via Marco Aurelio 45 Milano, e-mail: giacomoghilotti@jumpy.it

² I.T.I.S. "E. Fermi" Barletta, e-mail: giuseppeisernia@libero.it

1. PREMESSA

Il numero 4 del 2004 del Periodico di matematiche (Ottobre-Dicembre) riporta il lavoro di Luigi Togliani “*Il principio della piccionaia*” [2] nel quale vengono esposti diversi esempi interessanti, ma pur sempre scolastici, del principio di Dirichlet; a questi vogliamo aggiungere qualcuno più avvincente e soprattutto più coinvolgente.

Ricordiamo che il pigeonhole principle, o principio dei cassetti, asserisce una ovvietà e cioè che se distribuiamo m piccioni in n scatole ed m è maggiore di n , allora esisterà almeno una scatola che conterrà più di un piccione; una ovvietà nell’enunciato ma non nelle conseguenze.

Illustreremo una sua variante per costruire sistemi per i giochi a pronostico.

2. UN ESEMPIO COINVOLGENTE

Supponiamo di voler costruire un sistema per il superenalotto costituito da dodici numeri e che garantisca un *quattro*. Questo significa che, scelti dodici numeri, se i sei numeri della sestina vincente sono tutti compresi fra essi, deve essere garantito il *quattro*. In seguito, per non perdere la generalità, indicheremo con $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$, i dodici numeri prescelti.

Supponiamo di avere quattro scatole ognuna legata a tre numeri diversi: ciascuna con tre scomparti per contenere la prima i numeri $\{a_1, a_2, a_3\}$, la seconda i numeri $\{a_4, a_5, a_6\}$, la terza $\{a_7, a_8, a_9\}$ e la quarta $\{a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

Ora se immaginiamo che ogni numero della sestina vincente sia un piccione, abbiamo che i piccioni sono sei e le scatole quattro.

Ovviamente si dà per scontato che il numero-piccione venga riposto nella scatola associata a quel numero.

Una conseguenza della scelta fatta è che avremo sempre due scatole tali che il totale dei piccioni contenuti in esse sarà maggiore o uguale a 4, infatti assumerà il valore minimo di 4 se ogni scatola conterrà almeno uno dei sei numeri-piccione: gli ultimi due piccioni saranno posti o in una stessa scatola ($3 + 1 = 4$)



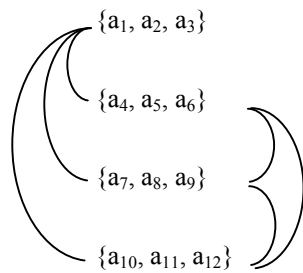
o in due scatole ($2 + 2 = 4$)



Dunque per totalizzare un *quattro* è necessario unire opportunamente due scatole, per cui per costruire il sistema basta enumerare tutte le sestine che corrispondono a tutte le possibili combinazioni in classe 2 delle 4 scatole: riusciremo a totalizzare tre *quattro* nella prima distribuzione, un solo *quattro* nella seconda.³ Tali combinazioni sono esattamente

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

ed il sistema è perciò costituito da 6 colonne che differiscono per tre o sei elementi.



α_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
α_2	a_1	a_2	a_3	a_7	a_8	a_9
α_3	a_1	a_2	a_3	a_{10}	a_{11}	a_{12}
α_4	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
α_5	a_4	a_5	a_6	a_{10}	a_{11}	a_{12}
α_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

Si tratta di sostituire ad a_1, a_2, a_3, \dots i corrispondenti numeri da giocare.

Si potrà totalizzare il *cinque* se le quattro scatole conterranno rispettivamente 3, 2, 1, 0 numeri-piccione o il *sei* se due scatole conterranno 3 numeri-piccione ciascuno, mentre le altre due nessuno.

Ad esempio se il sistema fosse costituito dai numeri:

3	10	24	26	31	37	40	51	69	72	75	87
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

³ Per trovare il risultato garantito da ogni sistema abbiamo utilizzato un algoritmo di minimizzazione di tipo greedy, cioè un algoritmo che determina la soluzione attraverso una sequenza di decisioni parziali (localmente ottime) senza mai tornare sulle decisioni prese. Nel nostro caso ogni azione elementare consiste nel porre il piccione in una delle scatole che contiene il numero minimo di piccioni.

le sei colonne da giocare sarebbero

α_1	3	10	24	26	31	37
α_2	3	10	24	40	51	69
α_3	3	10	24	72	75	87
α_4	26	31	37	40	51	69
α_5	26	31	37	72	75	87
α_6	40	51	69	72	75	87

Le possibilità di vincita sarebbero:

- Se uscisse la sestina 3, 24, 26, 40, 69, 72 il sistema realizzerebbe un *quattro* con la colonna α_2 .
- Se fosse estratta la sestina 3, 26, 31, 37, 40, 72 il sistema realizzerebbe tre volte il *quattro* con α_1 , α_4 ed α_5 .
- Se uscisse la sestina 3, 10, 37, 72, 75, 87 il sistema totalizzerebbe un *cinque* con α_3 ed un *quattro* con α_5 .
- Se uscisse la sestina 26, 31, 37, 40, 51, 69 il sistema totalizzerebbe il *sei* con α_4 .

Questo sistema si può usare anche per il lotto se si fanno delle giocate a sestine⁴ e garantisce ovviamente solo il terno, perchè i piccioni sono solo cinque; più precisamente garantisce tre terni e tre ambi.



3. UN SISTEMA A OTTO NUMERI PER SUPERENALOTTO

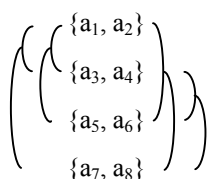
Può essere interessante costruire un sistema a otto numeri che garantisce il *cinque*, facendo ricorso a quattro scatole.

Ad ogni scatola sono associati due numeri: alla prima i numeri $\{a_1, a_2\}$, alla seconda $\{a_3, a_4\}$ e così via.

⁴ Giocando al lotto una sestina la vincita è 1/6 di quella che si otterrebbe giocando una cinquina, perchè con una sestina si possono fare 6 cinquine.

È facile vedere che esistono sempre tre scatole tali che la somma dei piccioni contenuti è pari almeno a 5.

Quindi se noi consideriamo le sestine che corrispondono a tutte le quattro possibili combinazioni di tre scatole avremo il sistema cercato.



α_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
α_2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_7	a_8
α_3	a_1	a_2	a_5	a_6	a_7	a_8
α_4	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

(La versione per il lotto garantisce la quaterna perchè i numeri-piccione sono solo 5: più precisamente tre quaterne ed un terno).

4. ULTERIORI ESEMPI

A conclusione accenniamo alcuni esempi utili sia come materia per ulteriori esercitazioni, sia per soddisfare la curiosità degli amanti del gioco a pronostico:

- COSTRUZIONE DI UN SISTEMA DI QUINDICI NUMERI PER IL SUPERENALOTTO USANDO CINQUE SCATOLE DI TRE NUMERI CIASCUNA

Poiché esistono due scatole tali che la somma dei piccioni sia almeno 3, tale sistema garantisce solo il *tre*.

Il sistema è dato dalle $5!/(3! \cdot 2!) = 10$ sestine che corrispondono a tutte le coppie possibili di scatole.

La versione per il lotto garantisce dieci ambi perchè i piccioni sono solo 5.

α_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
α_2	a_1	a_2	a_3	a_7	a_8	a_9
α_3	a_1	a_2	a_3	a_{10}	a_{11}	a_{12}
α_4	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
α_5	a_4	a_5	a_6	a_{10}	a_{11}	a_{12}
α_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
α_7	a_1	a_2	a_3	a_{13}	a_{14}	a_{15}
α_8	a_4	a_5	a_6	a_{13}	a_{14}	a_{15}
α_9	a_7	a_8	a_9	a_{13}	a_{14}	a_{15}
α_{10}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}

- COSTRUZIONE DI UN SISTEMA DI NOVE NUMERI PER IL LOTTO USANDO TRE SCATOLE DI TRE NUMERI CIASCUNA.

Si ottengono tre sestine.
Garantisce come minimo una quaterna e due terni.

α_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
α_2	a_1	a_2	a_3	a_7	a_8	a_9
α_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9

BIBLIOGRAFIA

- [1] CERASOLI M., EUGENI F., PROTASI M. (1988) Elementi di matematica discreta, Zanichelli, Bologna.
- [2] TOGLIANI L., "Il principio della piccionaia", *Periodico di Matematiche*, Barletta, Mathesis, 4 (2004), 53-60.