

Si ha inoltre che

$$OM \cdot ON = OH \cdot OA.$$

Siccome $OA = 1$ ed $MN = OL$, sono dunque OM ed ON , e precisamente le loro misure con OA , le due radici dell'equazione

$$x(a-x) = b$$

per cui

$$\frac{OM}{OA} = 2 \cos \frac{8\pi}{17}, \quad \frac{ON}{OA} = 2 \cos \frac{2\pi}{17}.$$

La RQ è perpendicolare ad OM nel suo punto di mezzo perchè

$$\overline{OR} = MR = OQ = MQ = OA$$

epperò

$$\widehat{PR} = \widehat{PQ} = \arccos \frac{1}{2} \frac{\overline{OM}}{OA} = \frac{8\pi}{17} = 4 \cdot \frac{2\pi}{17}.$$

F. GIUDICE.

SUL COMPORTAMENTO D'UN SISTEMA ∞^1 DI LINEE D'UNA SUPERFICIE rispetto ad alcune operazioni eseguite su di esso ⁽¹⁾

1. Diciamo F una superficie la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane ortogonali, fatta, o mediante una sola equazione tra le coordinate, oppure parametricamente, richieda solo la considerazione di funzioni (*reali* di variabili *reali*) finite e continue insieme con tutte le derivate che occorrono. È noto allora che, in ogni punto semplice P della superficie esiste un piano tangente π ; è noto pure che si dà il nome di involuzione delle tangenti coniugate, in P , all'involuzione I che ha per rette unite le tangenti principali u, v di F uscenti da P . L'involuzione I è ellittica, iperbolica o degenera secondochè il punto P è ellittico, iperbolico o parabolico; e se, per ogni posizione di P , l'involuzione I è degenera, la superficie F è sviluppabile sul piano.

La conoscenza dell'involuzione I permette di definire le linee asintotiche e le linee di curvatura di F : le prime hanno, in ogni loro punto, come tangente, una tangente principale di F : le altre toccano, in ogni loro punto P , le rette principali m, m' della relativa involuzione I .

(1) Le semplicissime osservazioni sviluppate nel presente lavoro mi furono suggerite dal *ch.^{mo} dott. Sannia*; esse son svolte con metodo sintetico, per quanto le proprietà a cui giungo si possano pure stabilire con procedimenti analitici.

Infine, detti ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura in P, il raggio di curvatura di quella sezione normale, la cui tangente in P forma con m l'angolo ω , è fornito dalla formola di Eulero:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \omega}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \omega}{\rho_2};$$

ed è uguale pure al quadrato del corrispondente semidiametro dell'indicatrice di Dupin, la cui equazione (nel piano π , riferita ad m, m' come assi) è

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = \pm 1.$$

2. Premesso questo, se è dato su F un sistema semplicemente infinito, Ω , di linee (*reali*), possiamo costruirne il sistema coniugato Ω' ed il sistema ortogonale Ω_1 ; essi son tali che, in ogni punto comune ad una linea di Ω ed una di Ω' (od Ω_1), le tangenti a queste linee sono coniugate (od ortogonali).

Dai sistemi Ω', Ω_1 , dedotti da Ω mediante le due seguenti operazioni:

$$\begin{array}{ll} \text{costruzione del sistema coniugato (operazione } a) \\ \text{„ „ „ ortogonale („ } b) \end{array}$$

possiamo, con lo stesso procedimento, dedurre altri sistemi, ai quali saranno sempre applicabili le due operazioni suddette; e così via. Quand'è che, con una successione finita di tali operazioni, si ritorna al sistema primitivo Ω ?

Intanto è chiaro che, detto A un sistema di asintotiche, e C un sistema di linee di curvatura, si ha:

$$A = aA = a(aA) = \dots; \quad C = b(bC) = a(bC) \dots$$

Più in generale, qualunque sia il sistema Ω , è certamente:

$$a(a\Omega) = \Omega; \quad b(b\Omega) = \Omega;$$

per cui una successione di operazioni a, b , nella quale due operazioni consecutive sono identiche produce lo stesso effetto della successione ottenuta sopprimendo quelle due operazioni. Dimodochè, il solo caso che interessa è quello in cui le operazioni a, b vengono eseguite alternativamente, e quindi formano un insieme che rientra in uno dei tipi seguenti:

$$\begin{array}{ll} ba \dots baba = (ba)^n, & a \dots baba = a(ba)^n \\ ab \dots abab = (ab)^n, & b \dots abab = b(ab)^n \end{array}$$

(l'ordine in cui intenderemo eseguite le operazioni è quello da destra a sinistra).

3. Può darsi anzitutto che la superficie F (supposta non sviluppabile) sia tale che ogni sistema Ω , tracciato su di essa, ritorni in se stesso quando gli si applichi un'operazione del tipo anzidetto. Se

questo avviene, e diciamo J l'involuzione di angoli retti nel fascio $P\pi$, allora, comunque si prenda in questo fascio una retta r , sempre si deve avere una delle quattro relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} II \dots II Jr &= (JI)^n r = r, \\ I \dots II Jr &= I(JI)^n r = r, \\ IJ \dots IJ Jr &= (IJ)^n r = r, \\ J \dots IJ Jr &= J(IJ)^n r = r; \end{aligned} \quad (1)$$

delle quali la 3^a si può sopprimere perchè identica alla 1^a, (lo si verifica moltiplicando la 1^a, a sinistra, per $(IJ)^n$, e ricordando che $I^2 = J^2 = 1$). L'essere le (1) identiche rispetto ad r significa che sono identiche, rispettivamente le proiettività:

$$(JI)^n, \quad I(JI)^n, \quad J(IJ)^n.$$

La prima di esse è una potenza della proiettività JI .

Ora, se $J \neq I$, la JI e tutte le sue potenze hanno per raggi uniti le rette principali m, m' di I , le quali, costituendo una coppia di J , son necessariamente reali. In tal caso JI non può essere ciclica di ordine > 2 , per cui si deve avere:

$$JJI = 1,$$

ossia

$$JI = IJ;$$

il che dice che le involuzioni I, J sono permutabili, e quindi che i loro raggi uniti formano un gruppo armonico. Ne segue che le tangenti principali in P sono reali e perpendicolari; l'indicatrice di Dupin è costituita, in ogni punto, da una coppia di iperboli equilatera coniugate, onde F è una superficie ad area minima.

Se invece $I = J$, allora IJ è l'identità, e quindi è ciclica di quell'ordine che si vuole. In quest'altro caso F è una sfera. Viceversa, un qualsiasi sistema di linee tracciato su di una sfera, od un elassoide, ritorna in sè dopo $2n$, o dopo $4n$, (n è un intero positivo qualsiasi), operazioni a, b , eseguite alternativamente, e qualunque sia quella con cui s'incominci.

Sapponiamo in secondo luogo che si abbia:

$$I(JI)^n = 1.$$

Se $n = 2n'$, segue:

$$I(JI)^{n'} = (IJ)^{n'}, \quad \text{ossia:} \quad (IJ)^{n'} I = (IJ)^{n'}$$

e quindi $I = 1$. Se invece $n = 2n' + 1$, si ha, dopo opportune trasformazioni:

$$(IJ)^{n'} I \cdot J = (IJ)^{n'} I$$

da cui $J = 1$. Il 2° risultato è assurdo, il 1° esige che F sia un piano (caso che intenderemo escluso).

Identici risultati si hanno esaminando, in modo analogo, la:

$$J(IJ)^n = 1.$$

Potremo dunque concludere: *La sfera e le superficie ad area minima sono le sole superficie sulle quali un qualunque sistema di linee ritorni in sè quando gli si applichi una serie di operazioni a, b ; nei due casi occorrono rispettivamente $2n$ e $4n$ di tali operazioni, eseguite alternativamente, ed incominciando con una qualunque di esse.*

4. Escludiamo le superficie anzidette supponendo $I \neq J$ ed $IJ \neq II$; esisteranno allora su F solo dei sistemi speciali dotati della proprietà voluta. Se Ω è un tal sistema, ed r la tangente ad una sua linea nel punto generico P , si dovranno avere di nuovo le (1).

La 1^a e la 3^a di queste sono verificate dai raggi uniti di $(JI)^n$, proiezioni che non è certo identica per nessun valore di n ; questi raggi uniti sono le rette m, m' , onde Ω è, in questo caso, uno dei due sistemi di linee di curvatura. E viceversa, è chiaro che entrambi questi sistemi si comportano, rispetto alle operazioni a, b , come se F fosse una sfera.

In secondo luogo si abbia la 2^a delle (1). Se $n = 2n' + 1$, segue:

$$(IJ)^{2n'+1} Ir = r;$$

da cui:

$$(IJ)^{n'} Ir = (JI)^{n'+1} r = J \cdot (IJ)^{n'} Ir.$$

Posto allora:

$$(IJ)^{n'} Ir = r';$$

si avrà:

$$Jr' = r', \quad \text{ed:} \quad r = I(JI)^{n'} r'$$

per cui r sarà la retta trasformata, mediante $I(JI)^{n'}$, di una retta isotropa. Non essendo r reale, questo caso è da escludere. Se invece $n = 2n'$, scriviamo la 2^a delle (1) sotto la forma:

$$(IJ)^{2n'} Ir = r;$$

ossia:

$$(JI)^{n'} r = (IJ)^{n'} Ir = I(JI)^{n'} r.$$

Posto quindi:

$$(JI)^{n'} r = r',$$

segue:

$$Ir' = r', \quad \text{ed:} \quad r = (IJ)^{n'} r'.$$

La retta r sarà dunque la trasformata, mediante $(IJ)^{n'}$, di un raggio unito di I ; il che esige che I sia iperbolica.

Resta ad esaminare la 4^a delle (1), la quale si può scrivere:

$$(IJ)^n r = Jr,$$

od anche:

$$I(JI)^{n-1} \cdot Jr = Jr.$$

Posto quindi:

$$Jr = r'',$$

si vede che r'' verifica la 2^a delle (1). Dovremo dunque supporre:

$$n-1=2n',$$

ed allora si avrà:

$$r'' = Jr = (IJ)^{n'} r'$$

e quindi:

$$r = J(IJ)^{n'} r'.$$

Ne viene che r è la trasformata, mediante $J(IJ)^{n'}$, di uno dei raggi uniti di I (supposti nuovamente reali).

Raccogliendo i risultati ottenuti, potremo concludere:

I sistemi di linee (tracciati su una superficie F , non sviluppabile, e che non sia nè una sfera nè un elassoide) che sono mutati in sè da operazioni del tipo (1) sono:

1° per le superficie a punti ellittici i due sistemi di linee di curvatura;

2° per le superficie a punti iperbolici i due sistemi precedenti; più i sistemi S, T delle traiettorie ortogonali delle asintotiche, e tutti quelli che se ne deducono con operazioni a, b .

È poi evidente che sulle superficie ad area minima, i sistemi S, T coincidono con quelli delle asintotiche, mentre quelli delle linee di curvatura conservano la loro proprietà, espressa da: $(ab)^n C = C$.

5. Riprendiamo in esame la proiettività JI , supposta non identica nè involutoria; essa ha come raggi uniti m, m' . Di più, detta r la normale ad u in P , essa contiene la coppia u, r ; onde la sua caratteristica sarà:

$$(mm'ur) = -\widehat{tg^2 mu}.$$

Supposto, il che è lecito, $\widehat{mu} < 45^\circ$, si avrà:

$$tg^2 \widehat{mu} < 1.$$

Quindi, applicando alla retta r la proiettività $(JI)^n$, e facendo poi tendere n all'infinito, le rette successivamente ottenute si avvicinano indefinitamente alla retta m' , compiendo intorno a questa oscillazioni di ampiezza decrescente.

Invece, la retta $I(JI)^n r$, quando n tende all'infinito, tenderà alla retta m , oscillando intorno ad essa. Dunque:

I sistemi di linee dedotti da uno qualunque dei sistemi S, T , con operazioni a, b formano una classe, la cui classe derivata è costituita dai due sistemi di linee di curvatura.

Si può calcolare facilmente il raggio di curvatura, in P , della sezione normale ivi tangente ad una delle rette $(JI)^n r, I(JI)^n r$. Perciò basta ricordare che, per i raggi di curvatura ρ, ρ' di due sezioni normali coniugate si ha:

$$\rho + \rho' = \rho_1 + \rho_2;$$

mentre per quelli, ρ' , ρ'' , di due sezioni normali perpendicolari si ha:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

(La 1^a di queste formole esprime la costanza della somma dei quadrati di due semidiametri coniugati dall'indicatrice di Dupin; la 2^a è una conseguenza immediata della formola di Eulero). Eliminando ρ' tra le due formole precedenti, si trova la relazione:

$$(\rho_1 + \rho_2) \cdot \rho \rho'' - \rho_1 \rho_2 \cdot \rho - [(\rho_1 + \rho_2)^2 - \rho_1 \rho_2] \rho'' + \rho_1 \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) = 0,$$

la quale lega tra loro i raggi di curvatura ρ , ρ'' di due sezioni normali che toccano (in P) due rette omologhe in JI.

Per applicare le formole precedenti al caso che interessa, si partirà dal valore del raggio di curvatura della sezione normale di tangente r , che è:

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2};$$

(naturalmente, dev'essere, ad es., $\rho_2 < 0$, ma $|\rho_2| \neq \rho_1$).

6. Resta a supporre che F sia una sviluppabile ($u \equiv v \equiv m$); allora, se Ω è un sistema di linee tracciato su F, e diverso dal sistema A delle asintotiche, si ha sempre:

$$a\Omega = A; \quad ab\Omega = A.$$

Invece:

$$aA = \text{indeterminato}; \quad bA = C,$$

dove C è il sistema di linee di curvatura, diverso da A.

Ne segue: *Sopra una sviluppabile, se $\Omega \neq A, C$, non esiste alcuna operazione (1) che muti Ω in sè stesso; mentre invece:*

$$(ba)^n C = C; \quad (ab)^n A = A.$$

Non sono applicabili le operazioni $(ab)^n$, $(ba)^n$ a C ed A rispettivamente.

EUGENIO G. TOGLIATTI.

